DS de mathématiques n°3

Fonctions, applications – Corrigé

Noté sur 110 pts ±5 pts pour le soin et la clarté,
puis la note est ramené sur 20 en multipliant par 1/5.

/12 Exercice 1 : Résolutions d'(in)équations

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les (in)équations suivantes :

/4 **1)** $\sqrt{x-1} = 3 - x$

L'équation n'a un sens que si $x - 1 \geq 0$, i.e. $x \geq 1$.

— Si $3 - x \geq 0$, i.e. $x \leq 3$, alors l'équation devient :

$$\begin{aligned} & \sqrt{x-1} = 3 - x \\ \iff & x - 1 = (3-x)^2 \\ \iff & x - 1 = 9 - 6x + x^2 \\ \iff & x^2 - 7x + 10 = 0 \end{aligned}$$

Le discriminant est $\Delta = 49 - 4 \times 10 = 9 > 0$, de sorte qu'il y a deux racines :

$$x_+ = \frac{7+3}{2} = 5 \qquad x_- = \frac{7-3}{2} = 2$$

Comme $x \leq 3$, dans ce cas, $\mathcal{S}_1 = \{2\}$.

— Si $3 - x < 0$, i.e. $x > 3$, alors $3 - x < 0 \leq \sqrt{x-1}$, si bien que dans ce cas $\mathcal{S}_2 = \varnothing$.

Finalement, $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 = \boxed{\{2\}}$

/4 **2)** $|1 - x| + |x| = 1$

x	$-\infty$ 0	0 1	1 $+\infty$
x	$-$	$+$	$+$
$1-x$	$+$	$+$	$-$

— Si $x \in [0,1]$, l'équation devient $1 - x + x = 1$, ce qui est toujours vrai. Ainsi, dans ce cas, $\mathcal{S}_1 = [0,1]$

— Si $x > 1$, l'équation devient :

$$\begin{aligned} & x - 1 + x = 1 \\ \iff & 2x = 2 \\ \iff & x = 1 \end{aligned}$$

Comme $x > 1$, dans ce cas, $\mathcal{S}_2 = \varnothing$.

— Si $x < 0$, l'équation devient :

$$\begin{aligned} & 1 - x - x = 1 \\ \iff & 0 = 2x \\ \iff & 0 = x \end{aligned}$$

Comme $x < 0$, dans ce cas, $\mathcal{S}_3 = \varnothing$.

Finalement, $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3 = \boxed{[0,1]}$

/4 **3)** $\dfrac{3x-2}{5-3x} \geq 1$

L'équation n'a un sens que si $5 - 3x \neq 0$, i.e. $x \neq \dfrac{5}{3}$.

— Si $x < \dfrac{5}{3}$, on a $5 - 3x > 0$, si bien que

$$\begin{aligned} & \frac{3x-2}{5-3x} \geq 1 \\ \iff & 3x - 2 \geq 5 - 3x \\ \iff & 6x \geq 7 \\ \iff & x \geq \frac{7}{6} \end{aligned}$$

Ainsi, dans ce cas, $\mathcal{S}_1 = \left[\dfrac{7}{6}, \dfrac{5}{3}\right[$.

— Si $x > \dfrac{5}{3}$, on a $5 - 3x < 0$, si bien que par le même calcul, on a

$$\frac{3x-2}{5-3x} \geq 1 \iff x \leq \frac{7}{6}$$

Ainsi, dans ce cas, $\mathcal{S}_2 = \varnothing$.

Finalement, $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 = \boxed{\left[\dfrac{7}{6}, \dfrac{5}{3}\right[}$

/16 **Exercice-Problème 2 : Une identité trigonométrique**

On pose $f : x \mapsto \arccos(\operatorname{th} x) + \arctan(\operatorname{sh} x)$.

/2 **1)** Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.

- $\arctan(\operatorname{sh} x)$ a un sens pour tout réel x car arctan et sh sont définies sur $\mathbb{R}$.
- $\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ a un sens car pour tout réel x, on a $\operatorname{ch} x \geq 1$, on a $\operatorname{ch} x \neq 0$.
- Enfin, on sait que pour tout réel x, on a $\operatorname{th} x \in]-1,1[$, et arccos est définie sur $[-1,1]$, donc $\arccos(\operatorname{th} x)$ a un sens.

Finalement, $D_f = \boxed{\mathbb{R}}$

2) Justifier que f est dérivable et en déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(x) = \frac{\pi}{2}$$

/6

(2 pour la dérivabilité de f ; 2,5 pour le calcul de f' ; 1,5 pour le fait que f est constante égale à $\frac{\pi}{2}$)

La fonction $x \mapsto \arctan(\operatorname{sh} x)$ est dérivable par composition de telles fonctions. Ensuite, $x \mapsto \operatorname{th} x$ est dérivable et pour tout réel x, on a $\operatorname{th} x \in]-1,1[$ donc arccos est dérivable en $\operatorname{th} x$. Finalement, f est dérivable en tout réel x. De plus,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2 x}} \times \left(1-\operatorname{th}^2 x\right) + \frac{1}{1+\operatorname{sh}^2 x} \times (\operatorname{ch} x) \\ &= -\sqrt{1-\operatorname{th}^2 x} + \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch}^2 x} \\ &= -\sqrt{\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}} + \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch}^2 x} \\ &= -\frac{1}{\operatorname{ch} x} + \frac{1}{\operatorname{ch} x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, comme $\mathbb{R}$ **est un intervalle**, f est constante sur $\mathbb{R}$. En particulier,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) \\ &= \arccos(\operatorname{th} 0) + \arctan(\operatorname{sh} 0) \\ &= \arccos(0) + \arctan(0) \\ &= \frac{\pi}{2} + 0 \\ &= \boxed{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

3) Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} = \frac{5}{13}$$

/3

$$\begin{aligned} & \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} = \frac{5}{13} \\ \iff & \frac{2\operatorname{sh}(x)}{2\operatorname{ch}(x)} = \frac{5}{13} \\ \iff & \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{5}{13} \\ \iff & \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \frac{5}{13} \\ \iff & e^{2x} - 1 = \frac{5}{13}\left(e^{2x}+1\right) \\ \iff & \frac{8}{13}e^{2x} = \frac{18}{13} \\ \iff & 4e^{2x} = 9 \\ \iff & (e^x)^2 = \frac{9}{4} \\ \iff & e^x = \frac{3}{2} \qquad \text{car } e^x > 0 \\ \iff & x = \ln\left(\frac{3}{2}\right) \end{aligned}$$

Finalement,

$$\mathcal{S} = \boxed{\left\{\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right\}}$$

4) En déduire la valeur de :

$$\arccos\left(\frac{5}{13}\right) + \arctan\left(\frac{5}{12}\right)$$

/**5**

(3 pour l'idée et le calcul de $\operatorname{sh}\left(\ln\frac{3}{2}\right)$ *; 1 pour en déduire que* $f\left(\ln\frac{3}{2}\right)$ *est égal à l'expression ci-dessus ; 1 pour la conclusion)*

On remarque que

$$\begin{aligned}\operatorname{sh}\left(\ln\frac{3}{2}\right) &= \frac{e^{\ln\frac{3}{2}} - e^{-\ln\frac{3}{2}}}{2}\\ &= \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{\frac{3}{2}}}{2}\\ &= \frac{\frac{3}{2} - \frac{2}{3}}{2}\\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{3}\\ &= \frac{5}{12}\end{aligned}$$

De ce calcul, et par la question précédente, on en déduit :

$$\begin{aligned} f\left(\ln\frac{3}{2}\right) &= \arccos\left(\operatorname{th}\left(\ln\frac{3}{2}\right)\right) + \arctan\left(\operatorname{sh}\left(\ln\frac{3}{2}\right)\right)\\ &= \arccos\left(\frac{5}{13}\right) + \arctan\left(\frac{5}{12}\right)\end{aligned}$$

Or, par la question **2)**, on sait que $f\left(\ln\frac{3}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$. Finalement,

$$\arccos\left(\frac{5}{13}\right) + \arctan\left(\frac{5}{12}\right) = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

/29 Exercice-Problème 3 : des fonctions pas si égales ?

On considère les fonctions

$$f : x \mapsto 2\arctan(\sqrt{x-1}) \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \arcsin\left(\frac{2\sqrt{x-1}}{x}\right)$$

/**5** **1)** Déterminer les domaines de définition de f et de g.

1 pour déterminer de D_f ; 4 pour D_g

$f(x)$ n'a un sens que si $x - 1 \geq 0$ (sans autre condition puisque arctan est définie sur $\mathbb{R}$). Ainsi, $D_f = \boxed{[1, +\infty[}$.

$g(x)$ n'a un sens que si :

— $x \neq 0$,

— $x - 1 \geq 0$, i.e. $x \geq 1$,

— $\frac{2\sqrt{x-1}}{x} \in [-1, 1]$. Or,

$$\begin{aligned} & -1 \leq \frac{2\sqrt{x-1}}{x} \leq 1\\ \iff & -x \leq 2\sqrt{x-1} \leq x \qquad \text{car } x \geq 1 \geq 0\\ \iff & -x \leq 2\sqrt{x-1} \quad \text{et} \quad 2\sqrt{x-1} \leq x\end{aligned}$$

La condition $-x \leq 2\sqrt{x-1}$ est toujours vérifiée puisque $-x \leq -1 \leq 2\sqrt{x-1}$. Ensuite,

$$\begin{aligned} & 2\sqrt{x-1} \leq x\\ \iff & 4(x-1) \leq x^2 \qquad \text{par croissance de } x \mapsto x^2\\ \iff & 4x - 4 \leq x^2\\ \iff & 0 \leq x^2 - 4x + 4\\ \iff & 0 \leq (x-2)^2\end{aligned}$$

et donc l'assertion $2\sqrt{x-1} \leq x$ est toujours vraie.

Ainsi, $g(x)$ n'a un sens que si $x \geq 1$, de sorte que $D_g = \boxed{[1, +\infty[}$.

2) Montrer que f est dérivable sur $]1, +\infty[$ et qu'il existe un réel $\alpha > 1$ que l'on précisera tel que g est dérivable sur $]1, \alpha[$ et sur $]\alpha, +\infty[$. /**7**

1,5 pour $D_{f'}$; 5,5 pour $D_{g'}$

Soit $x \in]1, +\infty[$. Comme $x - 1 > 0$, la fonction $x \mapsto \sqrt{x-1}$ est dérivable en x. Ensuite, comme la fonction arctan est dérivable, la fonction f est dérivable en x par composée. Ainsi, f est dérivable sur $]1, +\infty[$.

(Soit $x \in]1, +\infty[$.) La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable en x donc la fonction $x \mapsto \frac{2\sqrt{x-1}}{x}$ est dérivable en x par produit de fonctions dérivables en x. Enfin, g sera dérivable en x si $x \mapsto \arcsin \dfrac{2\sqrt{x-1}}{x}$ est dérivable en $\dfrac{2\sqrt{x-1}}{x}$. On sait que arcsin est dérivable sur $]-1,1[$, et donc si on a $-1 < \dfrac{2\sqrt{x-1}}{x} < 1$, alors g est dérivable en x. Or, on a toujours $-1 < \dfrac{2\sqrt{x-1}}{x}$, et de plus

$$\begin{aligned}
&\frac{2\sqrt{x-1}}{x} < 1 \\
\iff &\frac{4(x-1)}{x^2} < 1 \qquad \text{par stricte croissance de } x \mapsto x^2 \\
\iff &4x - 4 < x^2 \\
\iff &0 < x^2 - 4x + 4 \\
\iff &0 < (x-2)^2
\end{aligned}$$

Or, $(x-2)^2 = 0$ si et seulement si $x = 2$, et on a $(x-2)^2 > 0$ sinon. Donc en posant $\boxed{\alpha = 2}$, on en déduit que g est dérivable sur $]1, \alpha[$ et sur $]\alpha, +\infty[$.

3) Soit $x > 1$. Calculer $f'(x)$. Si $x \neq \alpha$, calculer aussi $g'(x)$. Que peut-on
/6,5 en déduire ?

1,5 pour f' ; 3,5 pour g' ; 1,5 pour $f = g$ sur $]1,2[$

$$f'(x) = 2 \times \frac{1}{1 + \sqrt{x-1}^2} \times \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = \boxed{\frac{1}{x\sqrt{x-1}}}$$

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{x-1}}{x}\right)^2}} \times \frac{2 \times \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \times x - 2\sqrt{x-1}}{x^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4(x-1)}{x^2}}} \times \frac{\frac{x}{\sqrt{x-1}} - 2\sqrt{x-1}}{x^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2 - 4(x-1)}{x^2}}} \times \frac{\frac{x - 2(x-1)}{\sqrt{x-1}}}{x^2}
\end{aligned}$$

(On reprend son souffle... et on continue le calcul...)

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{1}{\frac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x}} \times \frac{\frac{-x+2}{\sqrt{x-1}}}{x^2} \\
&= \frac{x}{\sqrt{(x-2)^2}} \times \frac{2-x}{\sqrt{x-1}} \times \frac{1}{x^2} \\
&= \frac{2-x}{|x-2|} \times \frac{1}{x\sqrt{x-1}} \\
&= \boxed{\frac{2-x}{|2-x|} \times \frac{1}{x\sqrt{x-1}}}
\end{aligned}$$

On remarque que si $2 - x > 0$, i.e. $x < 2$, on a $g'(x) = f'(x)$. Ainsi, comme $]1,2[$ est un intervalle, on en déduit qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in]1,2[$, on a $f(x) = g(x) + C$.

/5 **4)** Dresser les tableaux de variations de f et de g (avec leurs limites).

On constate que pour tout $x > 1$, on a $f'(x) > 0$, de sorte que :

x	$1 \qquad +\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow \pi$

En effet, on a d'une part $f(1) = 2\arctan(0) = 2 \times 0 = 0$, et de plus :

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x-1} = +\infty \\ \displaystyle\lim_{X \to +\infty} \arctan X = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

de sorte que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi$ par composée. Passons à présent au tableau de variations de g. On rappelle que pour tout $x \in]1,2[\cup]2,+\infty[$, on a

$$g'(x) = \frac{2-x}{|2-x|} \times \frac{1}{x\sqrt{x-1}}$$

Comme $x > 1$, on a toujours $\dfrac{1}{x\sqrt{x-1}} > 0$. Ainsi, $g'(x)$ a le même signe que $\dfrac{2-x}{|2-x|}$, donc que $2 - x$. On en déduit que $g'(x) > 0$ si et seulement si $x < 2$. On obtient donc le tableau suivant :

x	1 $\quad$ 2	2 $\quad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$	$-$
$g(x)$	$0 \nearrow \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} \searrow 0$

En effet,

$$g(1) = \arcsin\left(\frac{2\times 0}{x}\right) = 0$$

$$g(2) = \arcsin\left(\frac{2\times 1}{2}\right) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

Enfin, on a :

$$\frac{\sqrt{x-1}}{x} = \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

et de plus

$$\lim_{X\to 0} \arcsin X = 0$$

de sorte que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

/2 **5)** Déterminer la limite de $g'(x)$ lorsque x tend vers α^+ et quand x tend vers α^-.

On a vu que pour tout $x \in]1,2[\cup]2,+\infty[$:

$$g'(x) = \frac{2-x}{|2-x|} \times \frac{1}{x\sqrt{x-1}}$$

Tout d'abord, si $x < 2$, on a $|2-x| = 2-x$, de sorte que

$$g'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x-1}} \xrightarrow[x\to 2^-]{} \boxed{\frac{1}{2}}$$

Si $x > 2$, on a $|2-x| = -(2-x)$, de sorte que

$$g'(x) = -\frac{1}{x\sqrt{x-1}} \xrightarrow[x\to 2^+]{} \boxed{-\frac{1}{2}}$$

/3,5 **6)** Tracer, sur le même graphe, les courbes de f et de g.

1,25 pour la courbe de f ; 1,25 pour la courbe de g ; 1 pour montrer que $\mathscr{C}_f$ admet une demi-tangente verticale en 1.

Par la question **3)**, on sait qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in]1,2[$, on a $f(x) = g(x) + C$. Or,

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 1} (g(x)+C) = 0 + C$$

de sorte que $0 = 0 + C$, et donc $C = 0$. Ainsi, $f = g$ sur $]1,2[$.

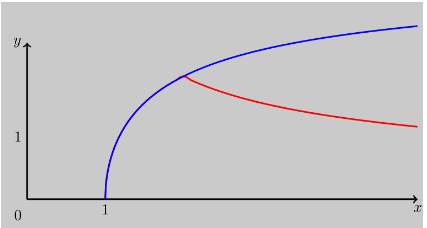
De plus, on a vu en question précédente que $g'(x) \xrightarrow[x\to 2^{\pm}]{} \mp\frac{1}{2}$.

Enfin, pour compléter, on peut regarder la la limite de $f'(x)$ quand x tend vers 1^+. Pour tout $x > 1$:

$$f'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x-1}} \xrightarrow[x\to 1^+]{} +\infty$$

On a donc une demi-tangente verticale en 1 pour $\mathscr{C}_f$, et donc pour $\mathscr{C}_g$ aussi.

Ceci, combiné aux tableaux de variations de la question **4)**, permet d'obtenir les courbes suivantes. La courbe $\mathscr{C}_f$ est celle qui tend vers $+\infty$, la courbe $\mathscr{C}_g$ est celle qui tend vers $-\infty$:



/27 Exercice-Problème 4 : L'équation $m^n = n^m$

Dans cet exercice, on cherche à déterminer les couples **d'entiers naturels** (m,n) vérifiant $m^n = n^m$ et $0 < m < n$. Pour résoudre ce problème, on va dans un premier temps s'intéresser à un problème plus difficile, celui de trouver les couples de **réels** (x,y) qui vérifient l'équation $x^y = y^x$ et tels que $0 < x < y$. On définit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$.

/3,5 **1)** Étudier f : domaine de définition, de dérivabilité, calcul de la dérivée, limites aux bornes du domaine de définition, tableau de variations.

0,5 pour chacun des items suivants : D_f, $D_{f'}$, calcul de $f'(x)$, limite de $f(x)$ en $+\infty$, limite de $f(x)$ en 0, signe de $f'(x)$, tableau de variations avec la valeur de $f(e)$

$f(x)$ n'a un sens que si $x > 0$ (et $x \neq 0$). Ainsi, $D_f = \boxed{\mathbb{R}_+^*}$. f est dérivable par quotient de telles fonctions. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x \times 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Alors

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\iff \frac{1-\ln x}{x^2} > 0 \\ &\iff 1 - \ln x > 0 \\ &\iff \ln x < 1 \\ &\iff x < e \qquad \text{par stricte croissance de } \exp \end{aligned}$$

x	0 $\quad$ e	e $\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	$-\infty \nearrow e^{-1}$	$e^{-1} \searrow 0$

Justifions les limites : on a

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \qquad \text{par croissances comparées}$$

et de plus

$$\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

donc

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty \qquad \text{par produit}$$

2) Montrer que f réalise une bijection de $]0, e]$ sur un ensemble J qu'on déterminera, et montrer que f réalise une bijection de $[e, +\infty[$ sur un
/3,5 ensemble J' qu'on déterminera.

Par ce qui précède, f est strictement croissante sur $]0, e]$. De plus, comme f est dérivable, f est en particulier continue sur $]0, e]$. Par le théorème de la bijection monotone, on en déduit que f réalise une bijection de $]0, e]$ sur J avec $J = f(]0, e])$. Par le tableau de variations de la question précédente, on en déduit que $J =]-\infty, e^{-1}]$. D'où le résultat voulu.

Comme f est strictement décroissante sur $[e, +\infty[$, on montre de la même manière que f réalise une bijection de $[e, +\infty[$ sur l'ensemble $J' =]0, e^{-1}]$.

3) On considère un couple quelconque (x, y) qui est solution de $x^y = y^x$ (avec $0 < x < y$).

/2 **a)** Montrer que $f(x) = f(y)$.

Soit (x, y) une solution. On a donc

$$\begin{aligned} & x^y = y^x \\ \Longrightarrow\ & e^{y \ln x} = e^{x \ln y} \\ \Longrightarrow\ & y \ln x = x \ln y \\ \Longrightarrow\ & \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln y}{y} \qquad \text{car } x, y > 0 \\ \Longrightarrow\ & \boxed{f(x) = f(y)} \end{aligned}$$

b) En déduire que $y \in]e, +\infty[$. On pourra raisonner par l'absurde.

/4

Puisque (x, y) est une solution, on a d'une part $0 < x < y$ et d'autre part, par ce qui précède, $f(x) = f(y)$.

— Supposons par l'absurde que $y \leq e$, donc $y \in]0, e]$. Comme $x < y$, on a aussi $x \in]0, e]$. Or, $f(x) = f(y)$ et par la question **2)**, on sait que f est bijective de $]0, e]$ sur J. En particulier, f est injective, ce qui permet d'en déduire que $x = y$. C'est impossible car $x < y$. Contradiction.

Ainsi, on a $y > e$.

c) En déduire que $x \in]1, e[$. On pourra là encore raisonner par
/6 l'absurde.

Supposons par l'absurde que $x \notin]1, e[$. Alors on a $x \in]0, 1] \cup [e, +\infty[$.

— Si $x \in]0, 1]$, alors $f(x) = \dfrac{\ln x}{x} \leq 0$. Or, on a aussi $f(x) = f(y)$ et comme $y > e$, on a $f(y) > 0$. D'où $0 \geq f(x) = f(y) > 0$, ce qui est une contradiction. Ainsi, $x \notin]0, 1]$.

— Par élimination, on aurait donc $x \in [e, +\infty[$. Or, on a aussi $y \in]e, +\infty[$ et $f(x) = f(y)$. Comme f est bijective de $[e, +\infty[$ sur J', elle est en particulier injective. On en conclut que $x = y$. Mais, on a aussi $x < y$. À nouveau, c'est une contradiction.

Dans tous les cas on obtient une contradiction. Finalement, $x \in]1, e[$.

On met à présent de côté le problème « $x^y = y^x$ » : celui-ci n'a pas été complètement résolu, mais ce qu'on sait va nous suffire à traiter le problème « $m^n = n^m$ » (avec $0 < m < n$).

/1 **4)** Donner une solution évidente.

Comme $2^4 = 16 = 4^2$, le couple $(m, n) = (2, 4)$ est solution.

5) En utilisant les résultats des questions précédentes, déterminer *soigneusement* les couples d'entiers naturels (m, n) vérifiant $m^n = n^m$
/7,5 et $0 < m < n$.

On raisonne par analyse-synthèse.

- Soit (m, n) un couple solution. En particulier, (m, n) est un couple de réels solution de $x^y = y^x$ avec $0 < x < y$. Par la question **3)**, on en déduit que $m \in]1, e[$ et $n \in]e, +\infty[$. Or, $e \approx 2,71828$, de sorte que $1 < m < e$ entraine que $m = 2$. Il reste à trouver les valeurs de n qui conviennent. Comme $m = 2$, on a
$$2^n = n^2 \qquad \text{et} \qquad 2 < n$$
En particulier, on a $n \geq 3$. On a vu que $n = 4$ est une possibilité. Supposons par l'absurde qu'il existe $N \geq 3$ avec $N \neq 4$ qui vérifie $2^N = N^2$. On remarque déjà que $2^3 \neq 3^2$, donc $N \neq 3$. On a ainsi $N \geq 5$. Or, par la question **a)** , on a $f(2) = f(N)$, et par ailleurs f est strictement décroissante sur $[e, +\infty[$. En particulier, on a
$$f(N) \leq f(5) < f(4) = f(2)$$
Contradiction car $f(N) = f(2)$. Finalement, on en déduit que la seule valeur possible pour n est 4.
- Vérifions que le couple $(m, n) = (2, 4)$ est bien solution. On a bien $2^4 = 4^2$.

Finalement, $\mathcal{S} = \boxed{\{(2, 4)\}}$

Exercice-Problème 5 : Découverte du log complexe

Pour tout complexe z non nul, on note $\arg(z)$ l'unique argument de z qui est dans $[0, 2\pi[$. On considère la fonction suivante :

$$f : \begin{cases} \mathbb{C}^* & \to \mathbb{C} \\ z & \mapsto \ln|z| + i\,\arg(z) \end{cases}$$

/2 **1)** Calculer $f(r)$ pour $r > 0$, $f(e^{2i\pi/8})$, $f(e^{i\,3\pi})$ et $f\,(1 - i\,)$.

0,25 pour $f(r)$ et $f(e^{2i\frac{\pi}{8}})$; 0,5 pour $f(e^{i\,3\pi})$; 1 pour $f(1 - i\,)$

- On a $\arg(r) = \arg(re^{i\,0}) = 0$ donc
$$f(r) = \ln|r| + 0 = \boxed{\ln r}$$
- On a $|e^{2i\,\pi/8}| = 1$ et $\arg(e^{2i\,\pi/8}) = \arg(e^{i\,\pi/4}) = \dfrac{\pi}{4}$ donc
$$f(e^{2i\,\pi/8}) = \ln 1 + i\,\frac{\pi}{4} = \boxed{i\,\frac{\pi}{4}}$$
- On a $|e^{3i\,\pi}| = 1$ et $\arg(e^{3i\,\pi}) = \arg(e^{i\,\pi}) = \pi$ donc
$$f(e^{3i\,\pi}) = \ln 1 + i\,\pi = \boxed{i\,\pi}$$
- On a
$$\begin{aligned} 1 - i &= \sqrt{2} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \sqrt{2} \times \left(\cos\frac{\pi}{4} - i\,\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{-i\,\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{i\,\frac{7\pi}{4}} \end{aligned}$$
de sorte que
$$f(1 - i\,) = \ln\sqrt{2} + i\,\frac{\pi}{4} = \boxed{\frac{1}{2}\ln 2 + i\,\frac{7\pi}{4}}$$

2) Peut-on affirmer que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a $e^{f(z)} = z$? et $f(e^z) = z$?
/4 Justifier.

2 par identité.

On a :
$$e^{f(z)} = e^{\ln|z| + i\,\arg(z)} = |z| \times e^{i\,\arg(z)} = z$$

Cependant, on a vu en question précédente que

$$f(e^{i\,3\pi}) = i\,\pi \neq i\,3\pi$$

On ne peut donc pas affirmer que $f(e^z) = z$ pour tout z de $\mathbb{C}^*$.

/5 **3)** L'application f est-elle injective ?

Montrons que f est injective. Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$.

$$\begin{aligned} f(z_1) = f(z_2) &\implies \ln|z_1| + i\ \arg(z_1) = \ln|z_2| + i\ \arg(z_2) \\ &\implies \begin{cases} \ln|z_1| = \ln|z_2| \\ \arg(z_1) = \arg(z_2) \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} |z_1| = |z_2| \\ \arg(z_1) = \arg(z_2) \end{cases} \\ &\implies |z_1|e^{i\ \arg(z_1)} = |z_2|e^{i\ \arg(z_2)} \\ &\implies z_1 = z_2 \end{aligned}$$

donc f est injective.

/5 **4)** L'application f est-elle surjective ?

Supposons par l'absurde que f est surjective. En particulier, le complexe $3i\,\pi$ admet un antécédent par f, i.e. il existe $z \in \mathbb{C}^*$ tel que $f(z) = i\,3\pi$. On a donc

$$\ln|z| + i\ \arg(z) = i\,3\pi$$

donc $\ln|z| = 0$ et $\arg(z) = 3\pi$. Or, par définition, $\arg(z) \in [0, 2\pi[$, ce qui est une contradiction. Ainsi, f n'est pas surjective.

/10 Exercice 6 : Un exercice tombé à l'oral de l'X

On se donne 13 réels distincts, que l'on ordonne par ordre (strictement) croissant :

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_{13}$$

L'objectif est de montrer que parmi ces 13 réels, on peut toujours en trouver deux, appelons-les u et v, tels que $0 < \dfrac{u-v}{1+uv} < 2 - \sqrt{3}$.

Calculer la valeur de $\tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et en déduire le résultat voulu. On pourra

/10 poser, pour tout $i \in [\![1, 13]\!]$, $a_i = \arctan x_i$.

1,5 pour le calcul de $\tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ *; 8,5 pour le reste*

On sait que $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$ et comme $\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{12} \in D_{\tan}$, on a :

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \tan\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{\tan\frac{\pi}{3} - \tan\frac{\pi}{4}}{1 + \tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}} \\ &= \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{3-1} \\ &= \frac{1}{2}(3 - 2\sqrt{3} + 1) \\ &= \boxed{2 - \sqrt{3}} \end{aligned}$$

On pose $a_1, \cdots, a_{13}$ comme suggéré par l'énoncé. Pour tout $i \in [\![1, 12]\!]$, on a déjà $a_{i+1} - a_i > 0$ par stricte croissance de arctan.

— Supposons par l'absurde que pour tout $i \in [\![1, 12]\!]$, on a $a_{i+1} - a_i \geq \arctan(2-\sqrt{3})$. Alors en sommant ces 12 relations, on a :

$$a_{13} - a_1 \geq 12 \times \arctan(2 - \sqrt{3}) = 12 \times \frac{\pi}{12} = \pi$$

Or, $a_{13} < \dfrac{\pi}{2}$ et $-a_1 < \dfrac{\pi}{2}$, de sorte que $a_{13} - a_1 < \pi$. Contradiction.

On en conclut qu'il existe $i \in [\![1, 12]\!]$ tel que $0 < a_{i+1} - a_i < \arctan(2-\sqrt{3})$. Alors, par stricte croissance de la fonction tangente sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, on en déduit que

$$\begin{aligned} &0 < \tan(a_{i+1} - a_i) < 2 - \sqrt{3} \\ \implies &0 < \frac{\tan a_{i+1} - \tan a_i}{1 + \tan a_{i+1} \times \tan a_i} < 2 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

car $a_i, a_{i+1}, a_{i+1} - a_i \in D_{\tan}$. Ainsi,

$$0 < \frac{x_{i+1} - x_i}{1 + x_{i+1}x_i} < 2 - \sqrt{3}$$

On obtient donc le résultat voulu en posant $u = x_{i+1}$ et $v = x_i$.